

Komplexe Zahlen

Wie bereits der Name sagt, handelt es sich um ein komplexes Thema ☺

Die komplexen Zahlen!

Zu erst einmal zur Frage, wie so etwas „komplexes“ aussehen soll.

Die Ausgangsform einer komplexen Zahl sieht, allgemein ausgedrückt, so aus:

$$z = x + iy$$

z ist also die Bezeichnung für die komplexen Zahlen und diese setzen sich zusammen aus einem „ x -Teil“ und einem „ iy -Teil“.

Der „ x -Teil“ ist hierbei der „Realteil“, während der „ iy -Teil“ der sogenannte „Imaginärteil“ ist, genauer gesagt das y vom „ iy -Teil“ ist lediglich der Imaginärteil.

Warum imaginär?

Weil da das i vorkommt und das i als Wurzel von -1 definiert ist. Der Taschenrechner würde uns am liebsten auslachen, wenn wir versuchen würden, die Wurzel aus -1 zu ziehen, denn da kommt nichts reales raus und deshalb sagt er uns ja auch Error. Für einen Mathematiker ist es aber trotzdem kein Problem, er gibt dieser völlig unbekanntem Zahl, die wir uns nur schwer vorstellen können, einfach die Zuordnung i .

Der Rest folgt bekannten mathematischen Regeln. Soll heißen, wenn $i = \sqrt{-1}$ sein soll, dann ist $i^2 = -1$.

Die komplexen Zahlen lassen sich miteinander addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Beispiel:

$$(a + ib) + (c + id) = \text{Moment erstmal.}$$

War nicht eben noch von $z = x + iy$ die Rede? Jetzt haben wir ganz andere Buchstaben da stehen. Hä?

Ganz einfach: x , y und z sind natürlich nur Platzhalter und können ausgetauscht werden. Wir haben im Beispiel ja jetzt zwei komplexe Zahlen

(erste komplexe Zahl: $a + ib$; zweite komplexe Zahl: $c + id$).

Da es sich um ein abstraktes und somit allgemeines Beispiel handelt, benutzen wir einfach, um die verschiedenartigkeit der zwei komplexen Zahlen zu verdeutlichen, für das erste x (also den Realteil der ersten komplexen Zahl) einfach irgendeinen Buchstaben, der sich vom x der zweiten komplexen Zahl (also dem Realteil der zweiten komplexen Zahl) unterscheidet, den wir c nennen.

Um das Beispiel nun weiter zu rechnen, machen wir das ganze jetzt mal konkret, wir nehmen also richtige Zahlen, zum Beispiel:

$$(5 + i2) + (7 + i4) =$$

An dieser Stelle klammere ich also erstmal alles aus, da es hier um Addition geht heißt das nichts anderes als alle Klammern weglassen (und die i 's packe ich einfach hinter die Zahl, sieht besser aus):

$$5 + 2i + 7 + 4i$$

Jetzt stelle ich die Realteile und Imaginärteile zusammen:

$$5 + 7 + 2i + 4i = \underline{12 + 6i} (=z)$$

12 ist also unser x und 6 ist unser y (ist ja egal ob ich iy oder yi stehen hab).

Subtraktion:

$$(a + ib) - (c + id) = a + ib - c - id = a - c + ib - id$$

$$(5 + i2) - (7 + i4) = 5 + i2 - 7 - i4 = 5 - 7 + i2 - i4 = \underline{-2 -2i} (= z)$$

Multiplikation:

$$(a + ib)(c + id) = a(c + id) + ib(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$$

$$(5 + i2)(7 + i4) = 5(7 + i4) + i2(7 + i4) = 5*7 + i*5*4 + i*2*7 + i^2*2*4 = 35 + 20i + 14i + 8i^2$$

Bleiben wir beim konkreten Beispiel:

35 scheint der einzige Realteil zu sein, da alle anderen Zahlen mit i's zu tun haben. Aber schauen wir uns die $8i^2$ an. Wir hatten ja bereits festgestellt, dass $i^2 = -1$ ist (s. Seite 1). $8i^2$ heißt also übersetzt: Nimm 8 mal -1 . Also -8 .

Somit hätten wir das i^2 weggekriegt und haben jetzt einen weiteren Realteil, den wir also mit der 35 verrechnen können.

$$35 - 8 = 27.$$

Also:

Die neue, durch Multiplikation entstandene komplexe Zahl z sieht so aus:

$$z = 27 + 20i + 14i = \underline{27 + 34i}$$

Was wir spätestens durch diese Rechnung verstanden haben, ist, dass sich ein i durch Quadratur leicht wegrechnen lässt und somit ein Imaginärteil zu einem Realteil wird (wie so eben geschehen, denn aus dem Realteil $8i^2$ wurde die reale Zahl -8).

Das ist wichtig, denn somit kommen wir zum Thema "komplexe Konjugation".

Eine komplexe Konjugation ist, platt ausgedrückt, die Umkehrung des Vorzeichens zwischen Real- und Imaginärteil bei einer komplexen Zahl.

Beispiel:

Komplexe Zahl: $5 + 2i$

Konjugierte Version: $5 - 2i$

Mehr ist das nich...

Das wir nicht durch 0 teilen können, wissen wir ja schon lange. Allerdings dürfte es auch klar sein, dass es ziemlich unmöglich ist, durch eine undefinierbare Zahl zu teilen. Teil mal irgendeine Zahl durch die Wurzel von -1 .

Eben, was das ist, wissen wir ja nicht.

Doch auch da hat der Mathematiker natürlich längst eine tolle Lösung gefunden, und zwar folgende: Er benutzt einfach die "konjugiert komplexe Erweiterung".

Bitte was?

Eigentlich ganz einfach:

Folgender Bruch:

$$\frac{5 + 2i}{7 + 4i}$$

Im Zähler kann ja ruhig stehen was will, aber jetzt haben wir einen imaginären Zahlenwert im Nenner.

Ich darf diese Bruch ja jetzt mit irgendwas erweitern (das heißt, sowohl den Zähler als auch den Nenner mit der gleichen Zahl mal nehmen, das ist ja das Gegenteil von Kürzen).

Ich könnte jetzt also sowohl den Zähler als auch den Nenner beispielsweise mit 3 erweitern, dann sähe das so aus:

$$\frac{(5 + 2i) * 3}{(7 + 4i) * 3}$$

Gibt ja das gleiche Ergebnis.

Mit 3 zu erweitern wäre aber völlig hirnrissig, aus welchem Grund sollte ich das denn tun?

Um diesen Imaginärteil aus dem Nenner weg zu kriegen, kann ich nun also diese komische Erweiterung, von der ich vorhin sprach, machen.

Ich erweitere diesen Bruch einfach mit der konjugierten Version des Nenners, denn wenn ich das mache, entsteht dadurch, wie wir gleich sehen werden, ein i^2 und das ist ja, wie wir jetzt schon mehrmals festgestellt haben, -1 (immer noch Seite 1).

Ich käme auf folgende neue Version:

$$\frac{(5 + 2i) * (7 - 4i)}{(7 + 4i) * (7 - 4i)}$$

Im Grunde steht da ja, übersetzt, nichts anderes als dieser Bruch mal 1 (denn $7+4i$ durch $7-4i$ ist ja 1).

Wenn ich das nun ausrechne, dann komme ich auf folgendes Ergebnis:

$$\frac{5*7 - 20i + 14i - 8i^2}{7*7 - 28i + 28i - 16i^2} \quad \text{und somit auf} \quad \begin{array}{l} 35 - 6i - 8i^2 \quad (i^2 = -1, \text{ somit } -8(-1) \text{ also } +8) \\ 49 - 16i^2 \quad (i^2 = -1, \text{ somit } -16(-1), \text{ also } +16) \end{array}$$

Nochmal übersichtlich aufgeschrieben:

$$\frac{35 + 8 - 6i}{49 + 16} \quad \text{also} \quad \frac{43 - 6i}{65}$$

Cool, oder?

Wir haben also aus dem Imaginärteil jetzt einen Realteil, eine schöne Zahl 65, gemacht. Und den Taschenrechner, der diese Zahl nicht kennt, möchte ich gerne mal sehen...

Jetzt haben wir also einen Bruch, mit dem sich leben lässt. Mehr ist diese konjugiert komplexe Erweiterung nicht...