8. Logarithmensysteme

Die *gewöhnlichen, dekadischen oder Briggsschen Logarithmen* haben als Basis 10. Man schreibt diese Basis üblicherweise nicht mit, sondern kürzt mit lg ab. Da man jede positive Zahl x als Produkt einer Zahl $\bar{x}$, die zwischen 1 und 10 liegt, und einer Zehnerpotenz schreiben kann, genügt es bei den dekadischen Logarithmen, nur die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 zu berechnen und in Tafeln festzuhalten. Diese Logarithmen liegen zwischen $\lg 1 = 0$ und $\lg 10 = 1$, beginnen also mit 0. ....

In der Wissenschaft und Technik wird die Basis $e = 2.7182\ldots$ verwendet, weil sie eine wichtige Rolle in der höheren Analysis spielt. Für Logarithmen zur Basis e verwendet man die Schreibweise ln und nennt sie auch *natürliche* Logarithmen.

Als Basis eines Logarithmensystems können alle positiven Zahlen außer 1 genommen werden. Will man den Zusammenhang zwischen den Logarithmen eines Systems mit der Basis a und den Logarithmen eines anderen Systems mit der Basis b herstellen, so muß man folgende Gleichung benutzen:

$$\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$$

Beweis: Wir setzen $\ell := \log_b x$, $m := \log_b a$ und $n := \log_a x$ und formen äquivalent um in $b^\ell = x$, $b^m = a$ und $a^n = x$. Die erste und dritte Gleichung ergeben $b^\ell = a^n$ und unter Benutzung der zweiten wird hieraus $b^\ell = (b^m)^n = b^{m \cdot n}$. Dieses nun ist äquivalent zu $\ell = m \cdot n$, also $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$.

$$\underbrace{\ell = \log_b x}_{b^\ell = x} ; \quad \underbrace{m = \log_b a}_{b^m = a} ; \quad \underbrace{n = \log_a x}_{a^n = x}$$

$$b^\ell = a^n$$

$$b^\ell = (b^m)^n = b^{m \cdot n}$$

$$\boxed{\ell} = m \cdot n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x} \quad \text{q.e.d.}$$